Geometrische Anmerkungen zu den Gedankenstrichen in documenta_landschaft_kunst Hannover

Albert Schmid-Kirsch

Die vor kurzem vorgelegte Konzeptstudie zu einer dokumenta-landschaft-kunst in Hannover durch Margitta Buchert, Norbert Rob Schittek und Hendrik Toepper thematisiert fünf Orte bzw. fünf Achsen in Hannover als Handlungsräume für eine dokumenta-landschaft-kunst. Die Studie streift viele Aspekte. Als einem, der wie Norbert Schittek der Darstellenden Geometrie verbunden ist, fiel mein Blick auf den geometrischen Hintergrund. Bei der Zahl fünf klingelt es bei einem Geometer. Das Pentagramm (Fünfeck) ist ein uraltes Symbol, das bereits dem Mephisto in Goethes Faust Pein bereitete. In diesem Zusammenhang wird es Drudenfuss genannt und zur Abwehr dunkler Mächte eingesetzt. Im Fünfeck teilen sich die Diagonalen im goldenen Schnitt. Fünf Punkte bestimmen einen Kegelschnitt.
Mir kam ein Blatt aus meiner Assistentenzeit in den Sinn (Abb. 1). Darin wird zu fünf frei gewählten Punkten die Konstruktion jenes Kreises k^c dargestellt, dessen Zentralriss der Kegelschnitt k (im Allgemeinen: Ellipse, Hyperbel, Parabel) ist, auf welchem diese fünf Punkte liegen. Dass der Zentralriss (Perspektive) eines Kreises zu einem Kegelschnitt führt, wird hier als bekannt vorausgesetzt. Die Aufgabe ist mit Zirkel und Lineal zu lösen.

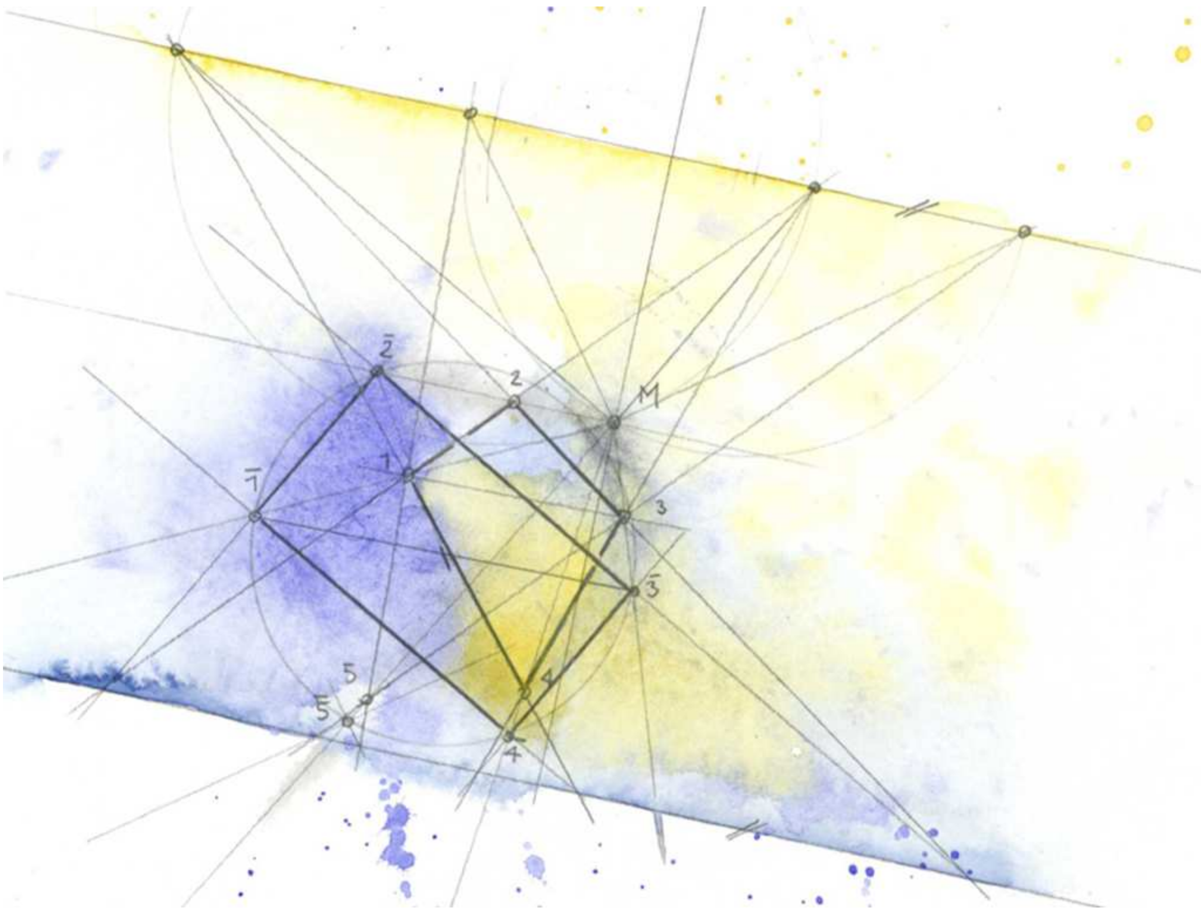
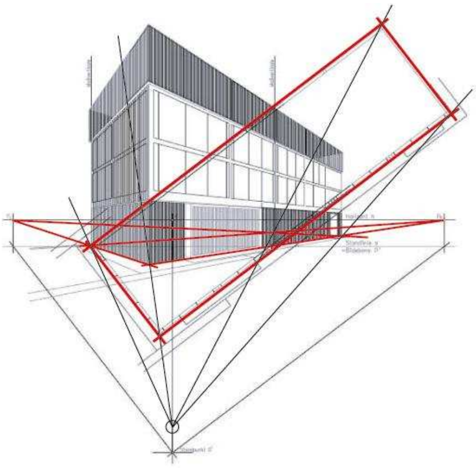


Abbildung 1, Kegelschnitt aus 5 Punkten, Zeichnung A. Schmid-Kirsch

Diese Konstruktion eines Kegelschnitts k^c aus fünf Punkten 1,2,3,4,5 möchte ich hier kurz beschreiben, da sie die Mächtigkeit des Gedankengebäudes der Perspektive, der Zentralprojektion und der damit verbundenen projektiven Geometrie zeigt. Benutzt werden lediglich zeichnerische Mittel der projektiven Geometrie, darunter wird hier die um Fernelemente (Fernpunkte, Ferngeraden, Fernebenen) erweiterte euklidische Geometrie unseres bekannten dreidimensionalen Anschauungsraumes verstanden.

Die Aufgabe ist mit dem Grundwissen zur Konstruktion einer Perspektive zu lösen, setzt jedoch eine gewisse Durchdringung der Abbildungstheorie voraus. Insbesondere wird sie nicht als räumliche Projektion, sondern als perspektive Kollination, das ist die Abbildung der Ebene auf sich selbst, gelöst. Der Übergang von einer räumlichen Situation auf eine Ebene wird in Perspektivkonstruktionen immer dann benutzt, wenn perspektiv verzerrte Figuren aus Figuren, die in die Bildtafel gedreht sind, konstruiert werden sollen. Die Figuren in Bildebene liegen meist in wahrer Größe (unter Beachtung eines etwaigen Maßstabes) vor. Einem Architekten bekannt sein dürfte die Ermittlung des perspektivisch verzerrten Grundrisses aus dem nicht verzerrten, um die Standlinie in Bildtafel gedrehten Grundriss (Abb. 2a).



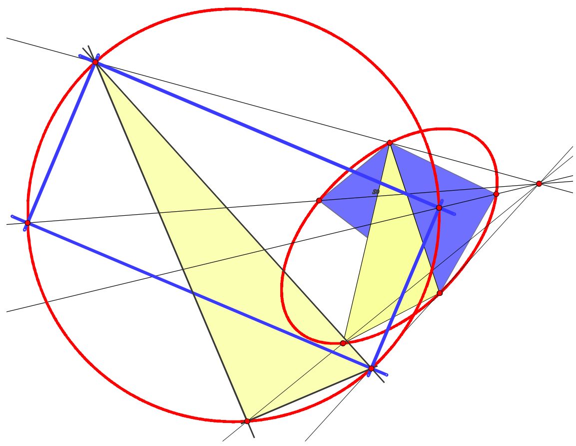
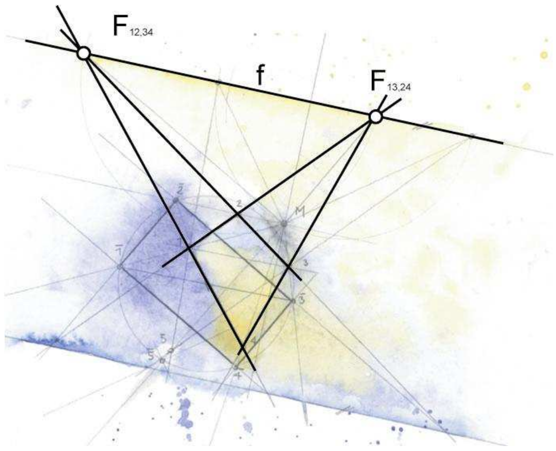


Abbildung 2a: Gedrehter Grundriss,   Abbildung 2b: Kreis und Ellipse als perspektives Bild

Folgende Überlegung liegt zugrunde: Jeder Kegelschnitt (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel) kann als Zentralriss (=perspektives Bild) eines Kreises aufgefasst werden. Kann dieser Kreis (Urbild) gefunden werden, ist die Aufgabe gelöst und von dem Kegelschnitt können weitere Elemente (Achsen, Brennpunkte, etc.) bestimmt werden. Vier der fünf Punkte werden dabei als Bild eines dem Kreis eingeschriebenen Rechtecks aufgefasst. Aus Symmetriegründen fallen Mittelpunkt des Rechtecks und Mittelpunkt des Kreises zusammen. Der fünfte Punkt liegt auf dem Thaleskreis (=gesuchter Kreis) über einer der beiden Rechteckdiagonalen (Abb. 2b). Benutzt wird außerdem eine perspektive Kollineation. Diese ist bestimmt durch das Kollineationszentrum M (in Architekturzeichnungen auch: Messpunkt oder umgeklapptes Auge genannt), die Kollineationsachse s (in Architekturzeichnungen auch: Spurgerade, oft Standlinie) und ein zugeordnetes Punktepaar.
Aus dieser Überlegung ergibt sich folgender Konstruktionsgang:
Zunächst wird das Kollineationszentrum M gesucht. Dazu wird die Fluchtgerade f gesucht, indem man je zwei gegenüberliegende Rechteckseiten 12, 34 und 13, 24 zum Schnitt bringt. Die Schnittpunkte $F_{12,34}$ und $F_{13,24}$ sind die Fluchtpunkte. Sie legen die Fluchtgeraden f der Ebene des Vierecks 1,2,3,4, fest (Abb. 3a).
Als nächstes kann über die geforderten rechten Winkel das Kollineationszentrum M gefunden werden. Dazu hilft die Tatsache, dass ein Rechteck gesucht werden soll. Die beiden Fluchtpunkte $F_{12,34}$ und $F_{13,24}$ werden dann aus dem (zu bestimmenden) Kollineationszentrum M unter rechtem Winkel gesehen. Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf dem Thaleskreis k_1 über der Strecke $F_{12,34}$ $F_{13,24}$. Dies ist der erste geometrische Ort für M. Ein zweiter ergibt sich aus dem rechten Winkel am Punkt 5 zwischen den beiden Verbindungsgeraden 5^c1^c und 5^c3^c. Der gesuchte Kreis k_2 durch Punkt 5 ist in diesem Zusammenhang Thaleskreis über der Rechteckdiagonalen 13. Die Verbindungsgeraden 51 und 53 schneiden die Fluchtgerade f in den Punkten F_{51} und F_{53}. Der Thaleskreis k_2 über P_{51} P_{53} ist der zweite geometrische Ort für M. Das Kollineationszentrum M ist also einer der beiden möglichen Schnittpunkte der Thaleskreise k_1 und k_2. (Abb. 3b).



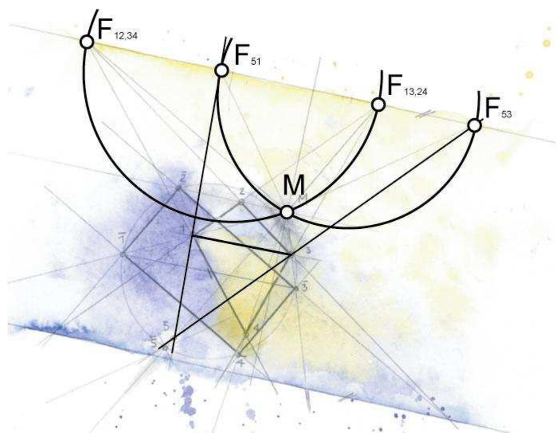
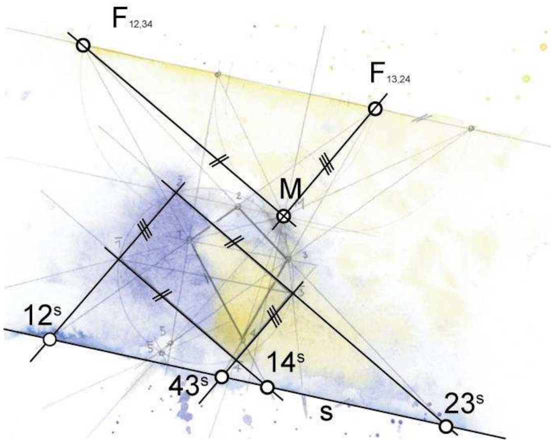


Abbildung 3a: Fluchtgerade f,

Abbildung 3b: Kollineationszentrum M

Mit M ist das Zentrum der perspektiven Kollineation zwischen Viereck 12345 und gesuchtem Rechteck bekannt. Zu finden ist nun wenigstens ein zugeordnetes Punktepaar, also wenigstens einer der Punkte 1^c, 2^c, 3^c, 4^c, 5^c . Da die Spurgerade s einer Ebene stets parallel zu ihrer Fluchtgeraden f ist, kann sie unter dieser Bedingung ansonsten beliebig gewählt werden. Die Seiten 12, 23, 34, 41 schneiden die Spurgerade s in den Punkten 12^s, 23^s, 34^s, 14^s, den Spurpunkten. Die Richtung der Bildgeraden 1^c2^c, 2^c3^c, 3^c4^c, 4^c1^c, ergibt sich durch die Schnittpunkte 1^s, 2^s, 3^s, 4^s, parallel zu den Richtungen, unter denen die Fluchtpunkte $F_{12,34}$ und $F_{13,24}$ aus M gesehen werden. Die Bildpunkte 1^c, 2^c, 3^c, 4^c ergeben sich durch Schnitt der Kollineationsstrahlen mit den Bildgeraden (Abb. 4a). Die Verbindungsstrecken 1^c2^c, 2^c3^c, 3^c4^c, 4^c1^c sind die Seiten des gesuchten Rechtecks.



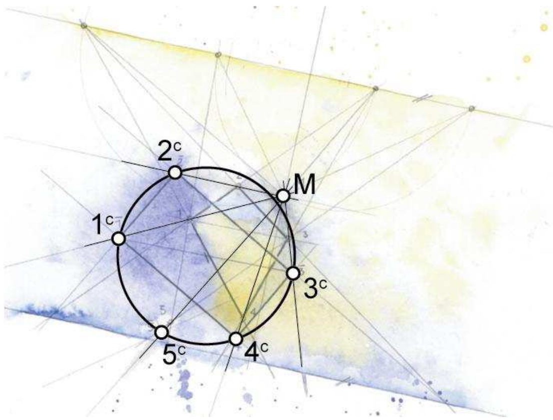


Abbildung 4a: Spurgerade s, Rechteck

Abbildung 4b: Der gesuchte Kreis

Der Kreis durch die vier Eckpunkte 1^c, 2^c, 3^c, 4^c ist der gesuchte Kreis k^c, dessen perspektiv kollineares Bild der ursprünglich mit fünf Punkten bezeichnete Kegelschnitt k ist. Es können beliebig viele weitere Elemente (z.B. Tangenten) bestimmt werden.

Analog kann die Lage des Punktes 5^c bestimmt werden. Alternativ (und schneller) wird 5^c jedoch über den Kreis k^c durch die Punkte des Rechtecks $1^c2^c3^c4^c$ im Schnitt mit dem Kollineationsstrahl M5 gefunden (Abb. 4b).

So faszinierend diese Konstruktion ist, so obsolet wird sie angesichts der Tatsache, dass es inzwischen EDV-Programme der so genannten „dynamischen Geometrie“ gibt, die nach Angabe von 5 Punkten sofort den dazugehörenden Kegelschnitt angeben. Die Abbildungen 2b und 5 sind mit dem Programm „Cinderella“ gezeichnet bzw. ergänzt. Im Vergleich zur Handzeichnung aus dem Jahre 1981 kostete es mich jedoch eine Menge Zeit, die entsprechenden Layouteinstellungen zu finden, damit das Ergebnis nicht in einem Wald von Strichen verloren geht. In der Handzeichnung gelang dies ausgesprochen schnell und komfortabel durch unterschiedlichen Druck auf den Bleistift.

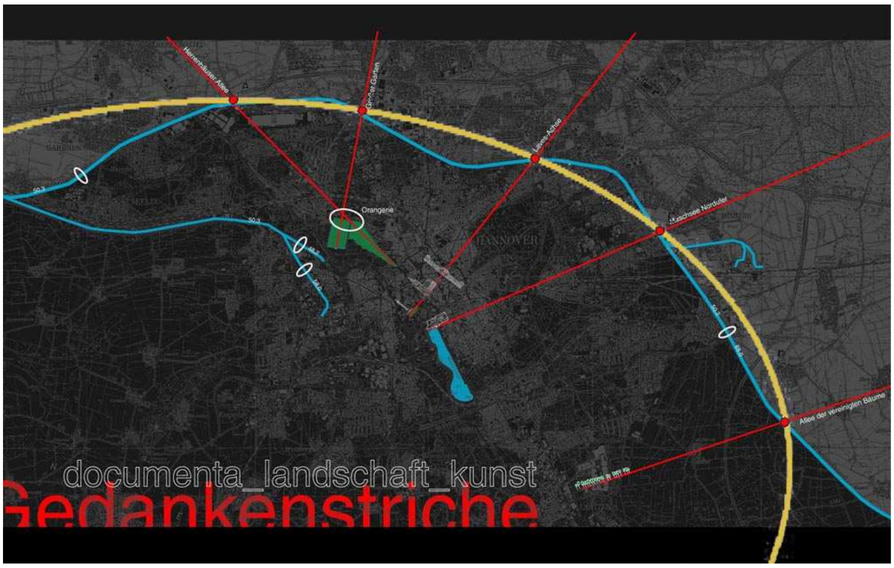


Abbildung 5: Ellipse durch die fünf Achsenschnittpunkte mit dem Mittellandkanal

Übernimmt man nun die Darstellung der Gedankenstriche aus der Dokumentation „dokumenta_landschaft_kunst“ in das Programm Cinderella, kann der Kegelschnitt durch die fünf Schnittpunkte mit dem Mittellandkanal sofort bestimmt werden. Es handelt sich offensichtlich um eine Ellipse, die in Abb. 5 gelb eingetragen ist. Selbstverständlich ließen sich nun weitere geometrische Bezüge wie Tangenten und/oder Normalen in den Schnittpunkten oder die Brennpunkte der Ellipse einzeichnen.
Auf der Hand liegen weitere Gedanken und Bezüge. Striche oder Strecken sind in der Geometrie in der Regel Repräsentanten von Geraden. Die Gedankenstriche können somit als Tangenten an die Erdkugel aufgefasst werden. In dieser globalen Sicht schneiden sie sich vereinfacht in einem Punkt auf der Kugelfläche (Erdoberfläche). Wie in der Dokumentation bereits angesprochen werden die Gedankenstriche somit zu Tangenten an diejenigen Großkreis der Kugel Erde, die durch die fünf Schnittpunkte mit dem Mittellandkanal gehen. Auf diese Weise entwickelt sich aus der „dokumenta_landschaft_kunst“ ein weltumspannendes System.

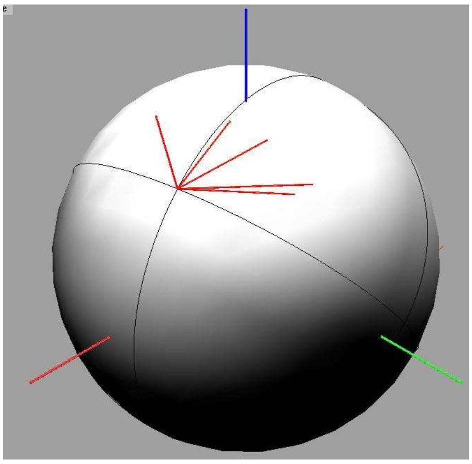


Abbildung 4a, Achsen als Tangenten an die Erdkugel

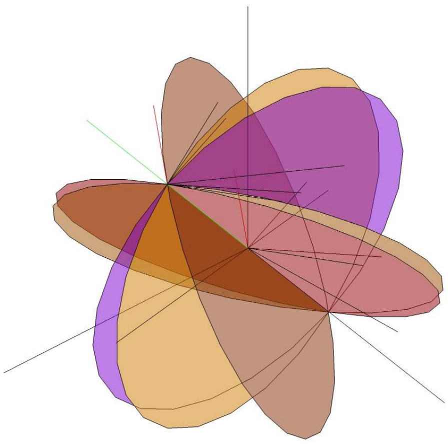


Abbildung 4b, Großkreise an die Tangenten

Man könnte die Bahn der Tangenten selbstverständlich in den Weltraum hinaus verfolgen oder z.B. auch den Sonnenstand und den Kreis zu finden versuchen, dessen Schatten (an welchem Tag?) exakt dieser Ellipse entspricht. Ihn zu bauen wäre wohl wieder eine Herausforderung für Ingenieure.

Literatur:

M. Buchert, N.R. Schittek, H. Toepper
dokumenta_landschaft_kunst Hannover,
Positionierung, Konzept- und Machbarkeitsstudie 1
cgl Zentrum für Gartenkunst und Landschaftsarchitektur,
Hannover 2003

G. Glaeser, Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik,
Elsevier, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2005.